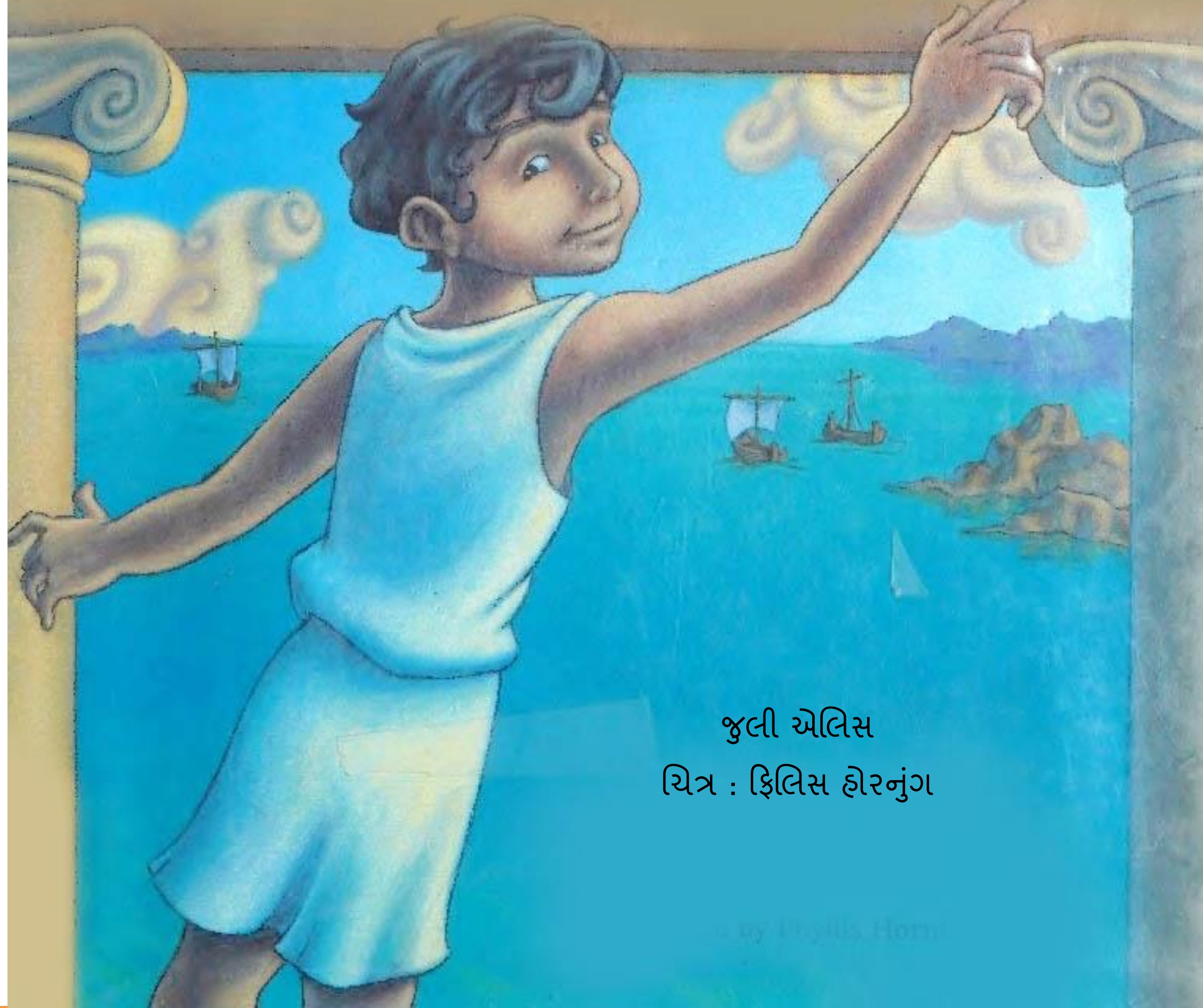
પાયથાગોરસ

તમારો કોણ શું છે?

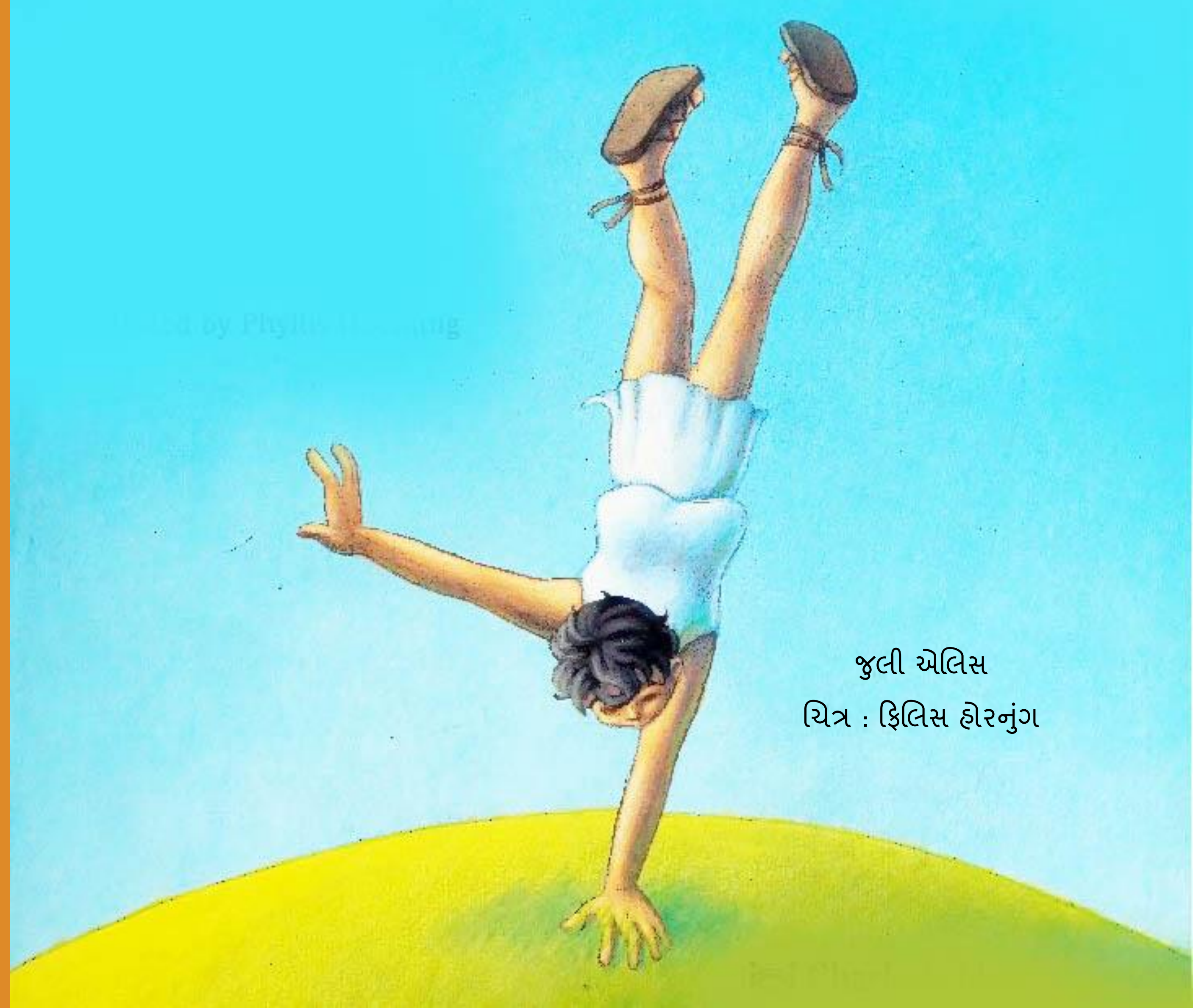
ગણિત નું સાહસ



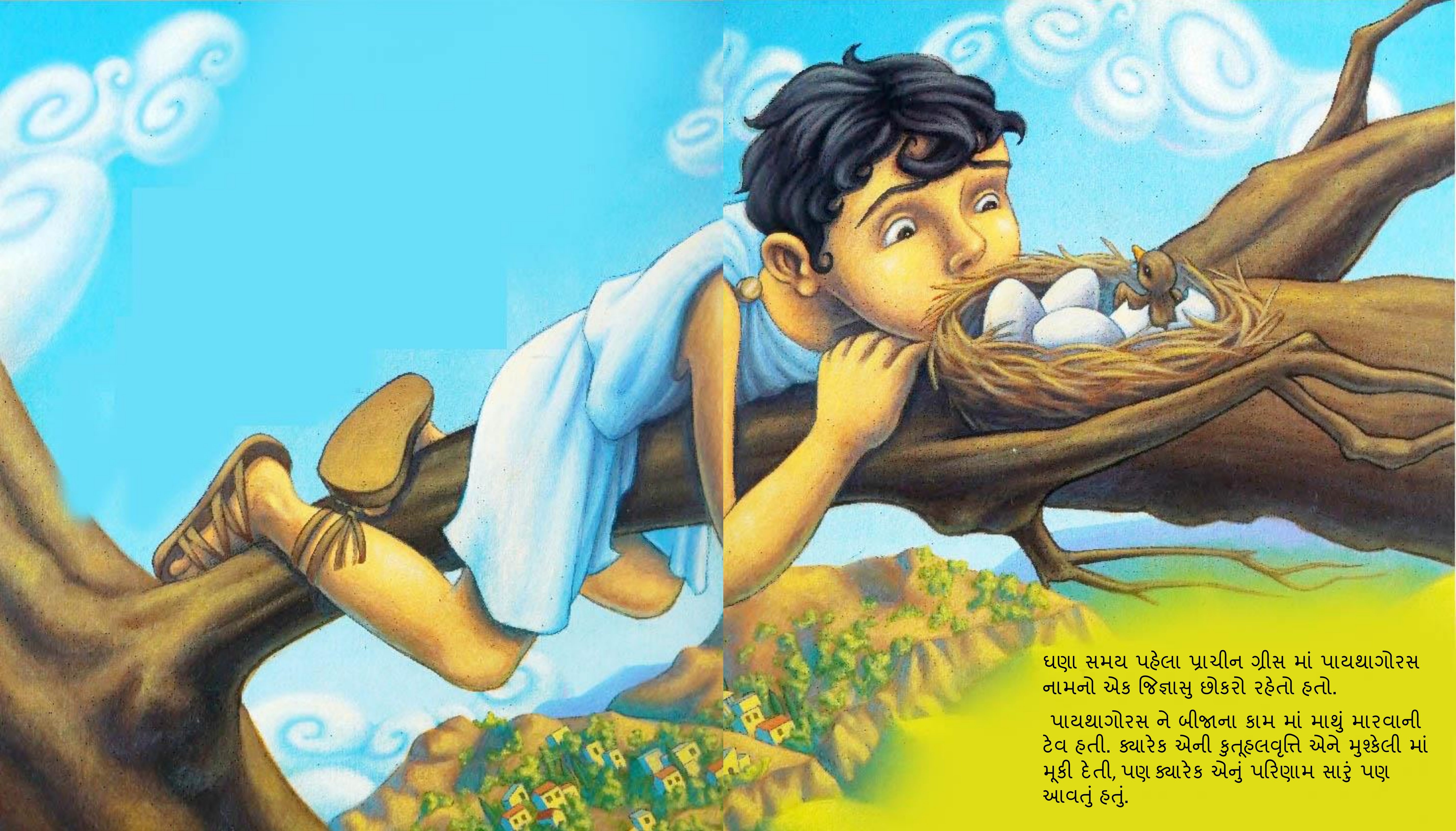
જુલી એલિસ

ચિત્ર : ફિલિસ હોરનુંગ

પાયથાગોરસ
તમારો કોણ શું છે?
ગણિત નું સાહસ



જુલી એલિસ
ચિત્ર : ફિલિસ હોરનુંગ



ઘણા સમય પહેલા પ્રાચીન ગ્રીસ માં પાયથાગોરસ નામનો એક જિજ્ઞાસુ છોકરો રહેતો હતો.

પાયથાગોરસ ને બીજાના કામ માં માથું મારવાની ટેવ હતી. ક્યારેક એની કુતૂહલવૃત્તિ એને મુશ્કેલી માં મૂકી દેતી, પણ ક્યારેક એનું પરિણામ સારું પણ આવતું હતું.

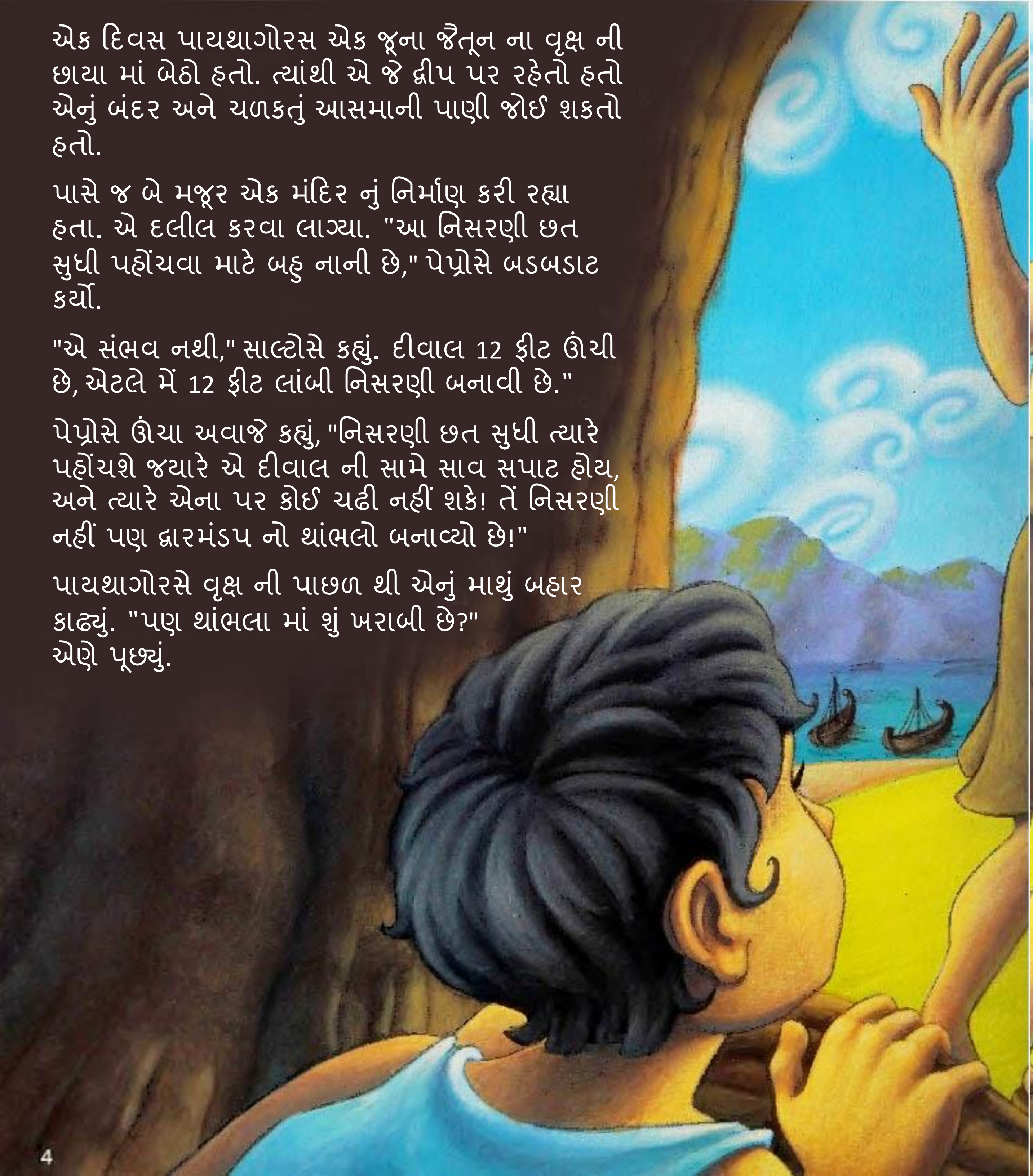
એક દિવસ પાયથાગોરસ એક જૂના જૈતૂન ના વૃક્ષ ની છાયા માં બેઠો હતો. ત્યાંથી એ જે દ્વીપ પર રહેતો હતો એનું બંદર અને ચળકતું આસમાની પાણી જોઈ શકતો હતો.

પાસે જ બે મજૂર એક મંદિર નું નિર્માણ કરી રહ્યા હતા. એ દલીલ કરવા લાગ્યા. "આ નિસરણી છત સુધી પહોંચવા માટે બહુ નાની છે," પેપ્રોસે બડબડાટ કર્યો.

"એ સંભવ નથી," સાલ્ટોસે કહ્યું. દીવાલ 12 ફીટ ઊંચી છે, એટલે મેં 12 ફીટ લાંબી નિસરણી બનાવી છે."

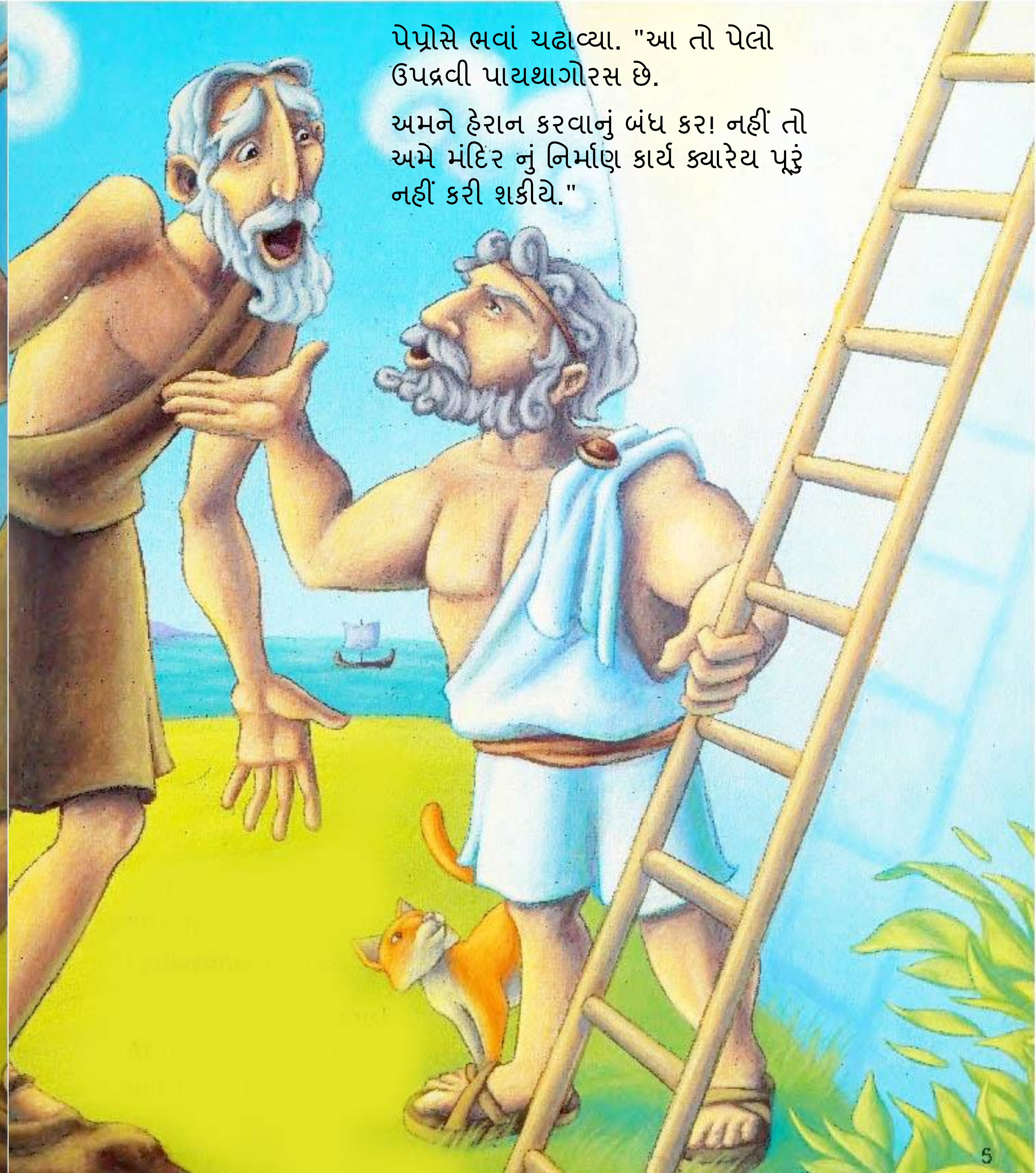
પેપ્રોસે ઊંચા અવાજે કહ્યું, "નિસરણી છત સુધી ત્યારે પહોંચશે જયારે એ દીવાલ ની સામે સાવ સપાટ હોય, અને ત્યારે એના પર કોઈ ચઢી નહીં શકે! તેં નિસરણી નહીં પણ દ્વારમંડપ નો થાંભલો બનાવ્યો છે!"

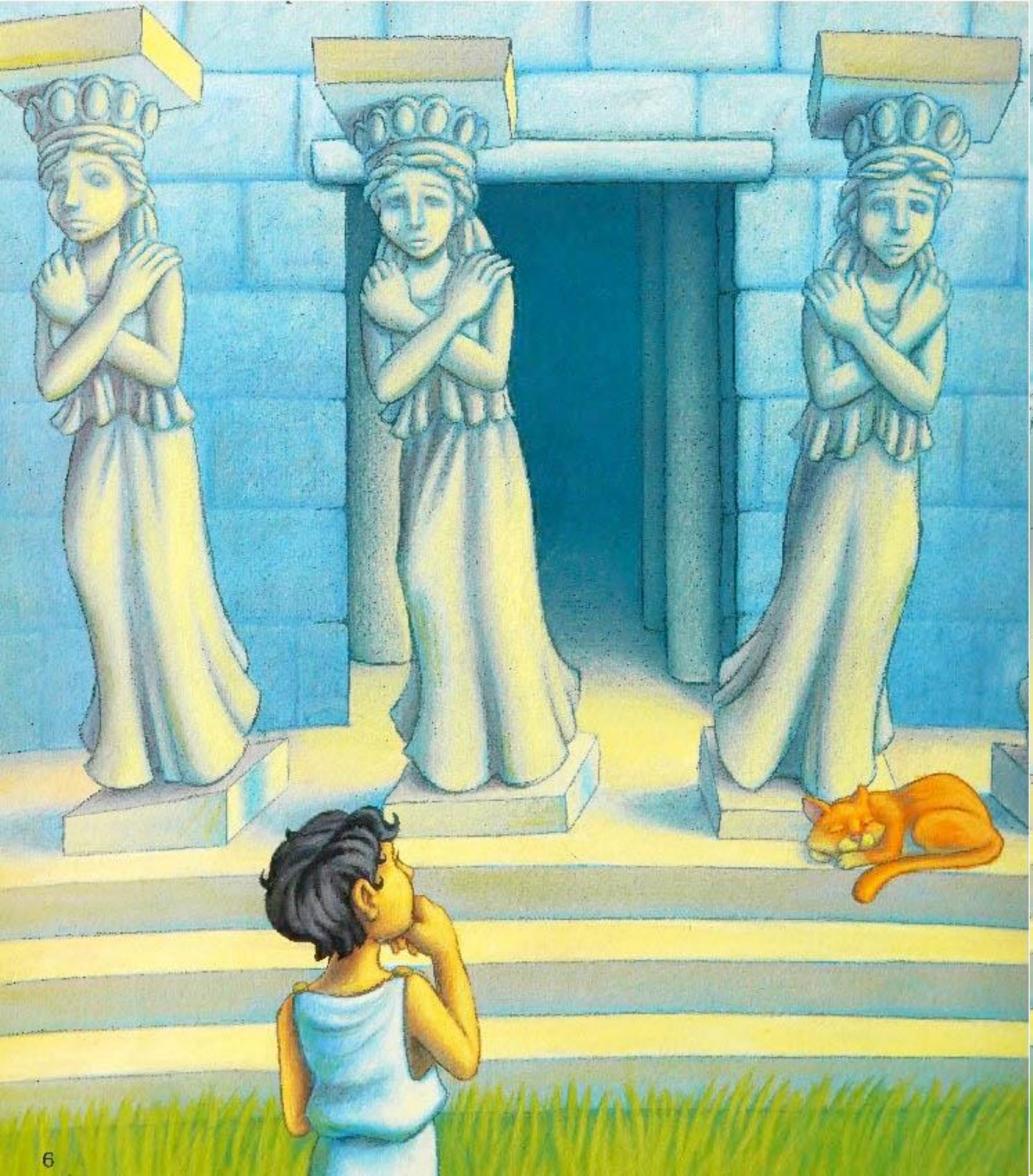
પાયથાગોરસે વૃક્ષ ની પાછળ થી એનું માથું બહાર કાઢ્યું. "પણ થાંભલા માં શું ખરાબી છે?"
એણે પૂછ્યું.

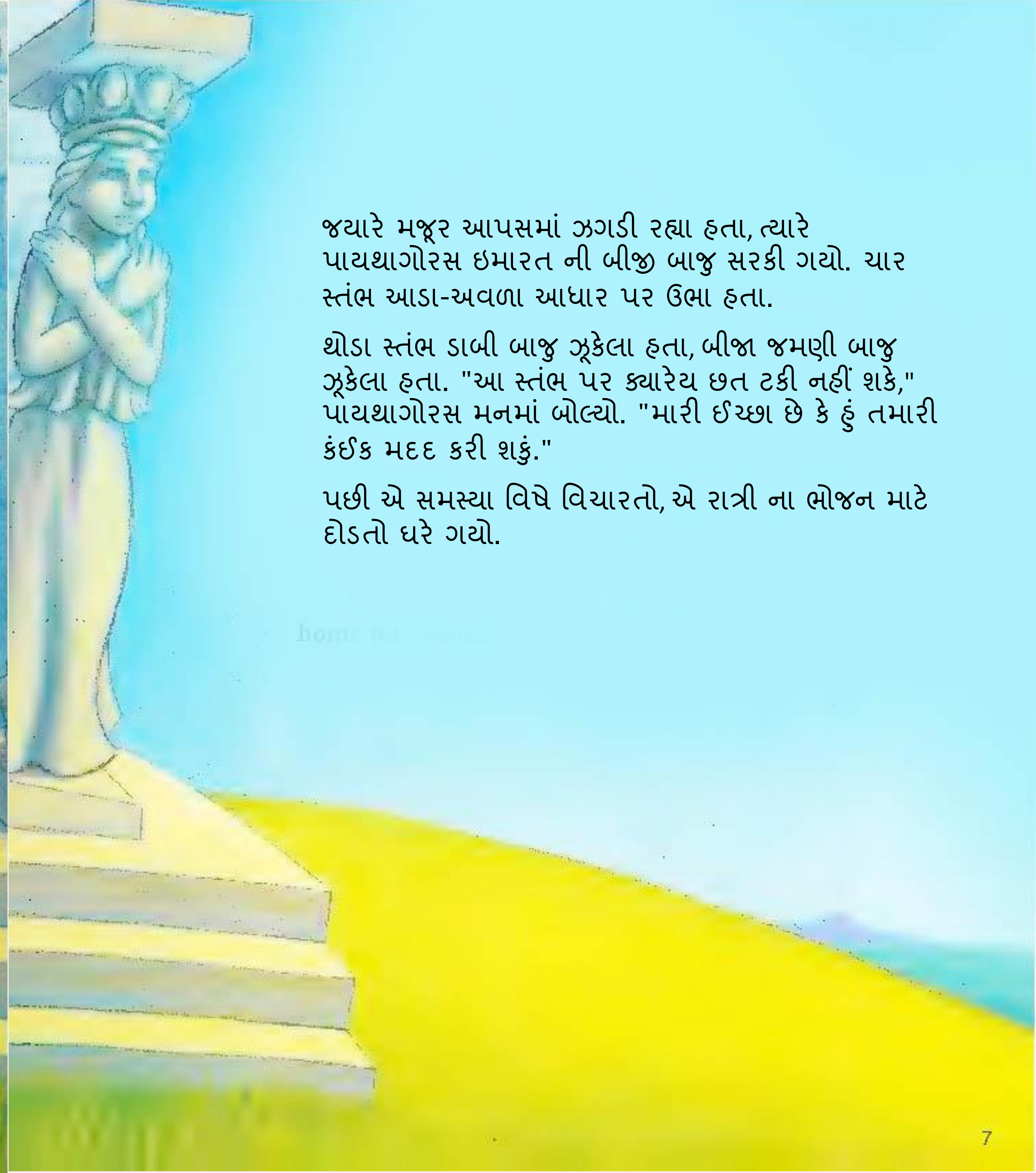


પેપ્રોસે ભવાં ચઢાવ્યા. "આ તો પેલો ઉપદ્રવી પાયથાગોરસ છે.

અમને હેરાન કરવાનું બંધ કર! નહીં તો અમે મંદિર નું નિર્માણ કાર્ય ક્યારેય પૂરું નહીં કરી શકીયે."







જયારે મજૂર આપસમાં ઝગડી રહ્યા હતા, ત્યારે પાયથાગોરસ ઇમારત ની બીજી બાજુ સરકી ગયો. ચાર સ્તંભ આડા-અવળા આધાર પર ઉભા હતા.

થોડા સ્તંભ ડાબી બાજુ ઝૂકેલા હતા, બીજા જમણી બાજુ ઝૂકેલા હતા. "આ સ્તંભ પર ક્યારેય છત ટકી નહીં શકે," પાયથાગોરસ મનમાં બોલ્યો. "મારી ઈચ્છા છે કે હું તમારી કંઈક મદદ કરી શકું."

પછી એ સમસ્યા વિષે વિચારતો, એ રાત્રી ના ભોજન માટે દોડતો ઘરે ગયો.

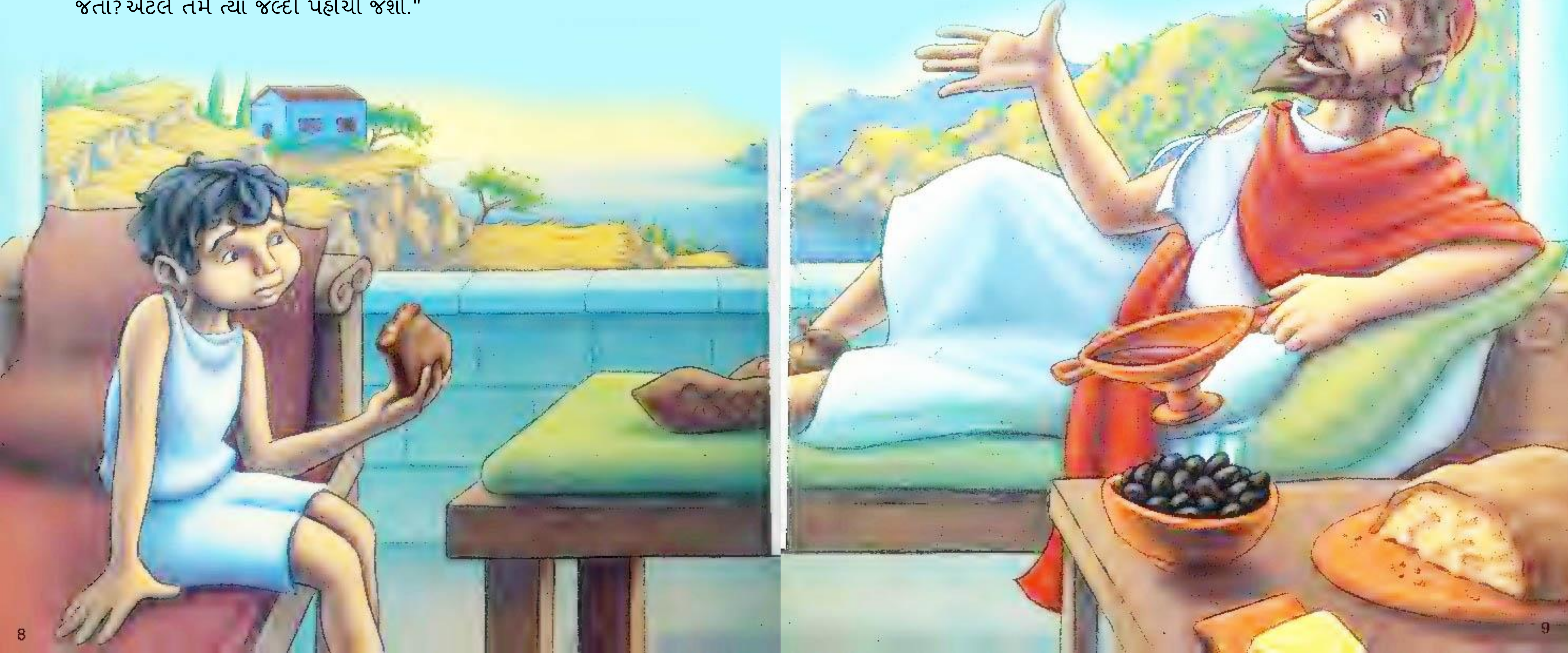
જયારે એ ઘરે પહોંચ્યો તો એના પિતા પોતાના વહાણ વિષે વાતો કરી રહ્યા હતા.

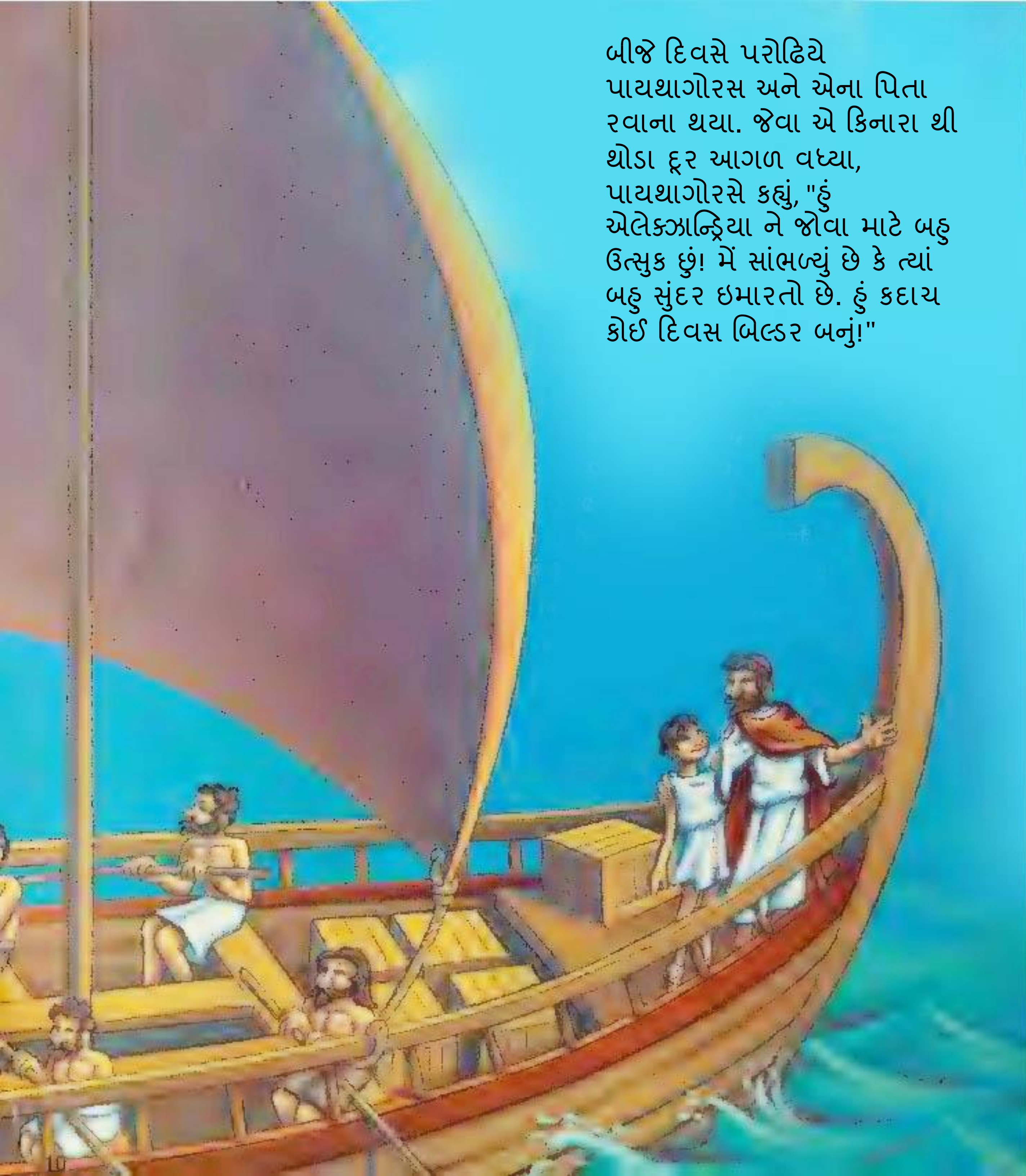
"હું વહાણ માં ટાઇલ્સ ભરી ને ક્રેટે માટે રવાના થયો, પણ લીપસ અને બાઉન્ડસ મારાથી પહેલા ત્યાં પહોંચી ગયા. તેજી થી ચાલવાવાળા એના નવા વહાણ ને કારણે એ મારા બધા ગ્રાહક પણ છીનવી ને લઈ ગયા."

પાઉં અને જૈતૂન નું ફળ ખાતા, પાયથાગોરસે પૂછ્યું, "પિતાજી, તમે હંમેશા પહેલા રહોડસ અને પછી ક્રેટે જાઓ છો. તમે અહીં થી સીધા ક્રેટે કેમ નથી જતા? એટલે તમે ત્યાં જલ્દી પહોંચી જશો."

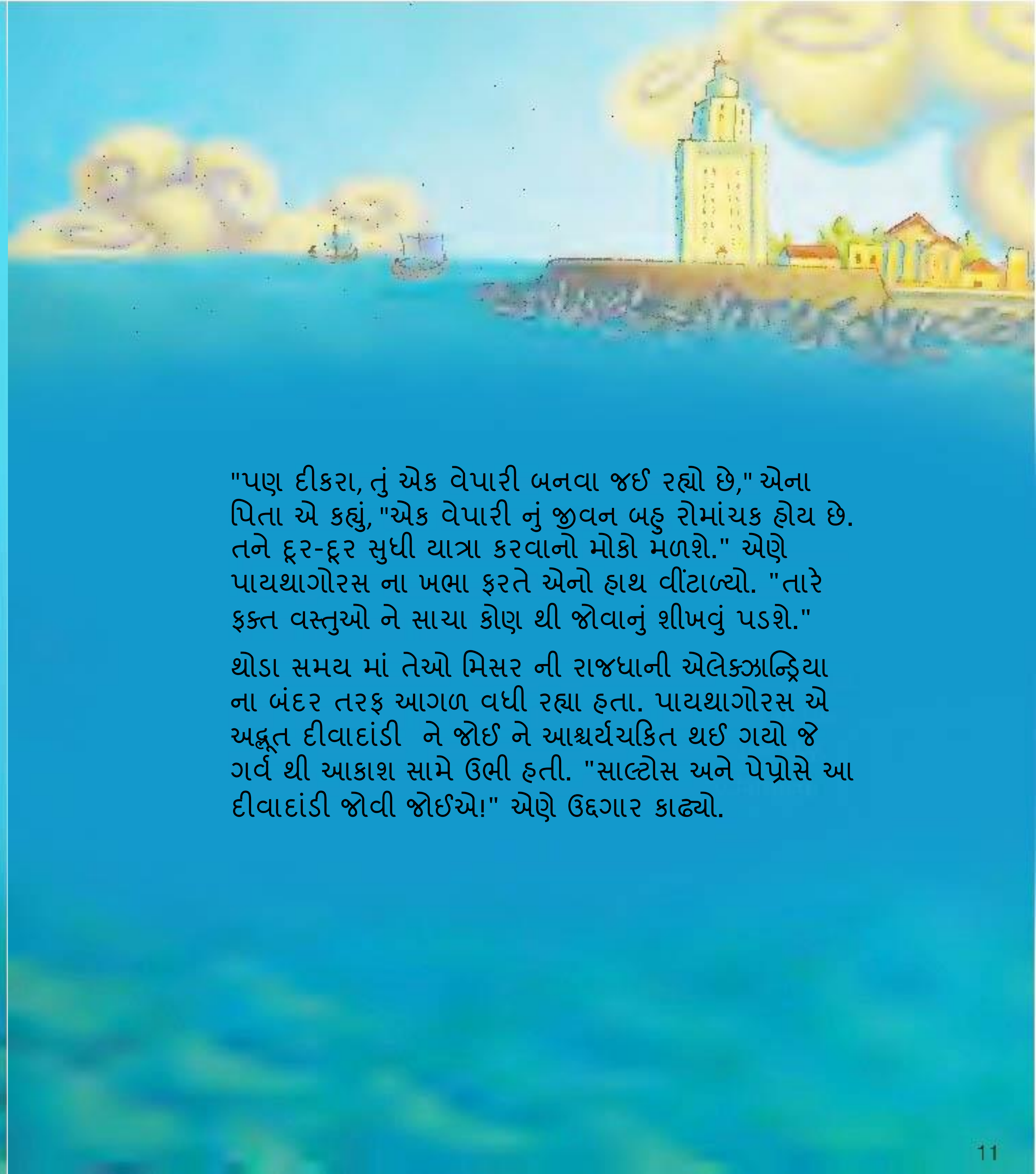
"એ બહુ જોખમવાળું થશે," એના પિતા એ ઉત્તર આપ્યો. "અહીં થી સીધા ક્રેટે જવાનું સુરક્ષિત નહીં થાય, કારણકે મને સીધા ક્રેટે જવાનું અંતર પણ ખબર નથી. ખૂલા સમુદ્ર માં હું ક્રેટે ને બદલે કોઈ અજાણી જગ્યા એ પહોંચી શકું છું!"

"હું કાલે મિસર (ઈજીપ્ત) માટે રવાના થાઉં છું. હું ઈચ્છું છું કે તું પણ મારી સાથે આવ, દીકરા. એક દિવસ તું જ મારા વેપારી વહાણો ને સંભાળીશ, અને તારે ઘણું બધું શીખવાનું છે."





બીજે દિવસે પરોઢિયે પાયથાગોરસ અને એના પિતા રવાના થયા. જેવા એ કિનારા થી થોડા દૂર આગળ વધ્યા, પાયથાગોરસે કહ્યું, "હું એલેક્ઝાન્ડ્રિયા ને જોવા માટે બહુ ઉત્સુક છું! મેં સાંભળ્યું છે કે ત્યાં બહુ સુંદર ઇમારતો છે. હું કદાચ કોઈ દિવસ બિલ્ડર બનું!"



"પણ દીકરા, તું એક વેપારી બનવા જઈ રહ્યો છે," એના પિતા એ કહ્યું, "એક વેપારી નું જીવન બહુ રોમાંચક હોય છે. તને દૂર-દૂર સુધી યાત્રા કરવાનો મોકો મળશે." એણે પાયથાગોરસ ના ખભા ફરતે એનો હાથ વીંટાળ્યો. "તારે ફક્ત વસ્તુઓ ને સાચા કોણ થી જોવાનું શીખવું પડશે."

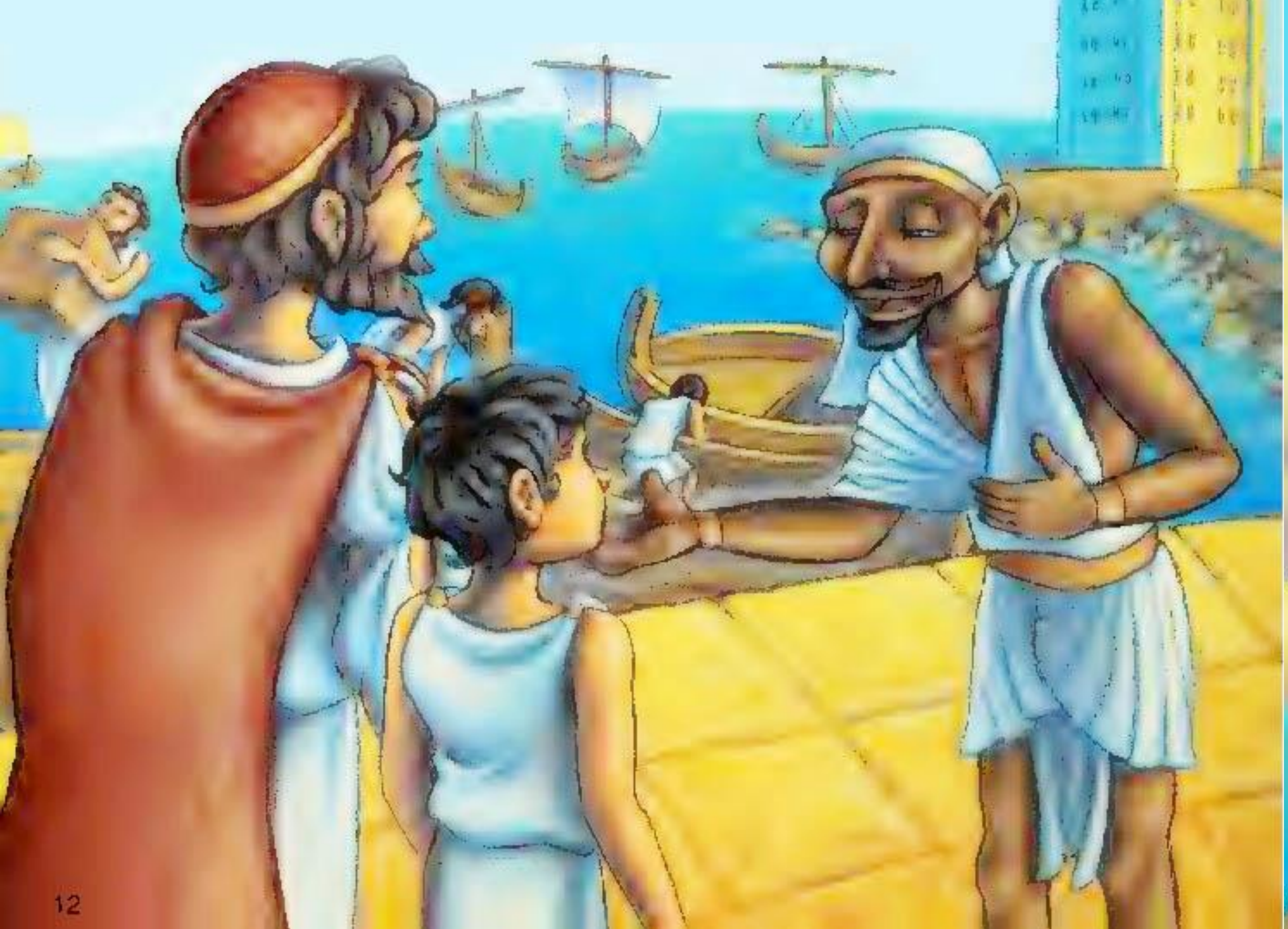
થોડા સમય માં તેઓ મિસર ની રાજધાની એલેક્ઝાન્ડ્રિયા ના બંદર તરફ આગળ વધી રહ્યા હતા. પાયથાગોરસ એ અદ્ભૂત દીવાદાંડી ને જોઈ ને આશ્ચર્યચકિત થઈ ગયો જે ગર્વ થી આકાશ સામે ઉભી હતી. "સાલ્ટોસ અને પેપ્રોસે આ દીવાદાંડી જોવી જોઈએ!" એણે ઉદ્ગાર કાઢ્યો.

બન્દર પર એક માણસે એમનું સ્વાગત કર્યું. "હું બિલ્ડર નેફરહેપરહરસેકીપર છું, પણ લોકો મને નેફ કહે છે. હું અહીં તમારી પાસેથી ટાઇલ્સ ખરીદવા આવ્યો છું."

પાયથાગોરસ એક અસલી બિલ્ડર ને મળી ને બહુ ઉત્સાહિત થયો. "શું તમે અહીં કંઈ બનાવ્યું છે?" એણે નેફ ને પૂછ્યું.

નેફે માથું હલાવ્યું. "હા, મેં આ દીવાદાંડી ને બનાવવામાં મદદ કરી હતી."

"તમે તળિયું એટલું સીધું કેવી રીતે બનાવ્યું?" પાયથાગોરસે પોતે જોયેલા વાંકા ખંભા નો વિચાર કરતા પૂછ્યું. "તમે જરૂર એક માસ્ટર બિલ્ડર હશો."



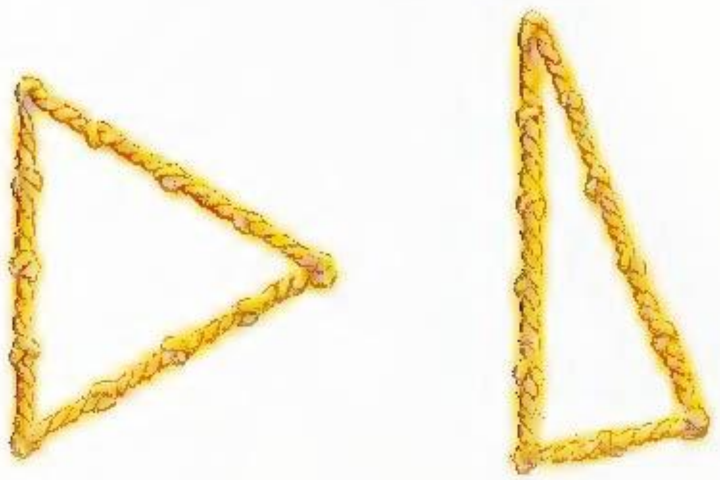
નેફે સ્મિત કર્યું અને એની છાતી ફુલાવી. "એની પાછળ નું રહસ્ય આ વિશેષ રસ્સી છે જેનો ઉપયોગ મારા પરિવારે સદીઓ થી કર્યો છે."

"શું તમે પથ્થર તોડવા માટે ગાંઠાવાળી રસ્સી નો ઉપયોગ કરો છો?" પાયથાગોરસે પૂછ્યું.

નેફ હસ્યો. "મારા વ્હાલા છોકરા, આ રસ્સી પથ્થર નથી તોડતી. હું રસ્સી નો ઉપયોગ એક વિશેષ ત્રિકોણ બનાવવા માટે કરું છું. હું એને 'સમકોણ ત્રિકોણ' કહું છું કારણકે એ મને એક સરસ ચોરસ ખૂણો તૈયાર કરવામાં મદદ કરે છે, જે પથ્થર કાપવા માટે એકદમ યોગ્ય કોણ હોય છે."



નેફે પાયથાગોરસ ને એની રસ્સી પકડવા આપી. પયથાગોરસે થોડા ત્રિકોણ બનાવ્યા, પણ એના કોઈ ત્રિકોણ માં સમકોણ ન હતા. "તમે પ્રત્યેક બાજુ ને કેટલી લાંબી કરો છો?" એણે પૂછ્યું.



"અરે, મેં તને પહેલા જ બહુ બતાવી દીધું છે," નેફે હસીને કહ્યું. એણે એની રસ્સી પાછી લઈ લીધી. "જા, હવે તું ચાલતો થા."



જ્યારે એના પિતા અને નેફ વાતો કરી રહ્યા હતા, ત્યારે પાયથાગોરસ ને રસ્સી નો એક જૂનો ટુકડો મળ્યો અને એણે એમાં ગાંઠ બાંધી દીધી. એણે રસ્સી ને અલગ-અલગ ત્રિકોણ બને એ રીતે ખેંચી.

અંતે, એણે એક ત્રિકોણ બનાવ્યું, જે એને સાવ બરાબર લાગ્યું. એની એક બાજુ ની લંબાઈ 3 હતી, બીજી બાજુ ની લંબાઈ 4 હતી, અને સૌથી લાંબી બાજુ ની લંબાઈ 5 હતી. "સમજાઈ ગયું!" એ મનમાં બોલ્યો.



ત્યાં પાયથાગોરસ ના પિતા એ એને બોલાવ્યો. "બેટા, તું ટાઇલ્સ નું આ ખોખું ઉપાડ. નેફ અને હું બાકી ની ટાઇલ્સ લઈ લેશું."

"હું એને જરૂર લઈ જાત," નેફે નિસાસો નાખ્યો, "પણ મારા અંગુઠા માં વાગ્યું છે એટલે હું એને નહીં લઈ જઈ શકું. માફ કરજો, હવે તમારે બે ચક્કર લગાવવા પડશે."

જ્યારે તેઓ એ ઘર પાસે પહોંચ્યા જેને નેફ બનાવી રહ્યો હતો, તો નેફે કહ્યું, "તમે બાકી ની ટાઇલ્સ લઈ આવો ત્યાં સુધી માં હું પૈસા લઈને આવું છું જે મારે તમને આપવાના છે." બડબડાટ કરતા પાયથાગોરસ ના પિતા ફરી વહાણ તરફ ચાલ્યા.

નેફે પાયથાગોરસ ને માથે ટપલી મારી. "એક સારા છોકરા ની જેમ મારી આ ટાઇલ્સ ની દેખભાળ કર. અને જો કોઈ વસ્તુ ને હાથ ન લગાડતો!" એમ બોલતા નેફ ઘરમાં ચાલ્યો ગયો.



પાયથાગોરસે સૂર્યપ્રકાશવાળા આંગણા માં ચારે બાજુ જોયું. વચમાં મૂર્તિ માટે પથ્થર નો બનેલો આધાર હતો.

એણે એ જોવા ખોખા માં થી થોડી ટાઇલ્સ કાઢી કે એ આધાર ની ચારે બાજુ કેવી દેખાશે. "હું એને જલ્દી થી પાછી મૂકી દઈશ," એણે વિચાર્યું.

એણે મૂર્તિ ના આધાર ની એક બાજુ ત્રણ લાલ ટાઇલ્સ ની એક પંક્તિ બનાવી. એણે લાલ ટાઇલ્સ ની બીજી બે પંક્તિઓ બનાવી, જેનાથી એ એક ચોરસ બની જાય.





"આમાંથી થોડા ખોખા માં વાદળી ટાઇલ્સ છે," પાયથાગોરસે કહ્યું. થોડી વાર માં લાલ અને વાદળી ટાઇલ્સ ચારે બાજુ વિખરાઈ ગઈ. પાયથાગોરસે વાદળી ટાઇલ્સ નું એક ચોરસ બનાવ્યું અને લાલ અને વાદળી ટાઇલ્સ નું એક મોટું ચોરસ બનાવ્યું.

એ એના કામ ની પ્રશંસા કરી રહ્યો હતો ત્યાં એણે જોયું, "આ મૂર્તિ નો આધાર એક સમકોણ ખૂણો છે! એની બાજુઓ 3, 4 અને 5 ટાઇલ્સ લાંબી છે."

એણે ટાઇલ્સ ને ગણી. "વિસ્મયકારી છે," એણે વિચાર્યું. "લાલ ચોરસ માં 9 ટાઈલ્સ અને વાદળી ચોરસ માં 16 ટાઇલ્સ નો સરવાળો 25 ટાઇલ્સ થાય છે. મોટા લાલ અને વાદળી ચોરસ માં બરાબર 25 ટાઇલ્સ છે!"

અચાનક એક અવાજ આવ્યો, "તું આખરે આ શું કરી રહ્યો છે?"



નેફ આંગણામાં દોડતો આવ્યો. પાયથાગોરસ ના પિતા બરાબર એની પાછળ હતા. "આ બધું શું છે?" નેફ ખિજાઈ ને બોલ્યો.

"હું દિલગીર છું," પાયથાગોરસે કહ્યું. "હું ટાઇલ્સ પાછી મૂકવા જતો હતો. પણ મને એનાથી થોડી રસિક વાતો જાણવા મળી."

"મને એની પરવાહ નથી કે તને શું મળ્યું!" નેફે એને ટોક્યો. "જરા આ અવ્યવસ્થિતતા જો!"

"પાયથાગોરસ, ટાઇલ્સ ઉપાડી લે," એના પિતા એ સખ્તાઈ થી કહ્યું.

"અને જલ્દી કર. આપણે હજી બીજી ઘણી જગ્યા એ જવાનું છે."

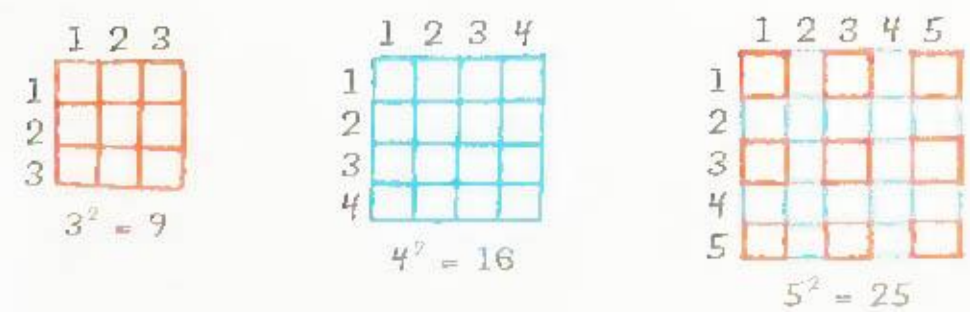




બીજે દિવસે, પાયથાગોરસ અને એના પિતા ઘરે જવા રવાના થયા. સમય વ્યતીત કરવા, પાયથાગોરસે એણે બનાવેલા ટાઇલ્સ ના ચોરસ નું એક ચિત્ર બનાવ્યું.

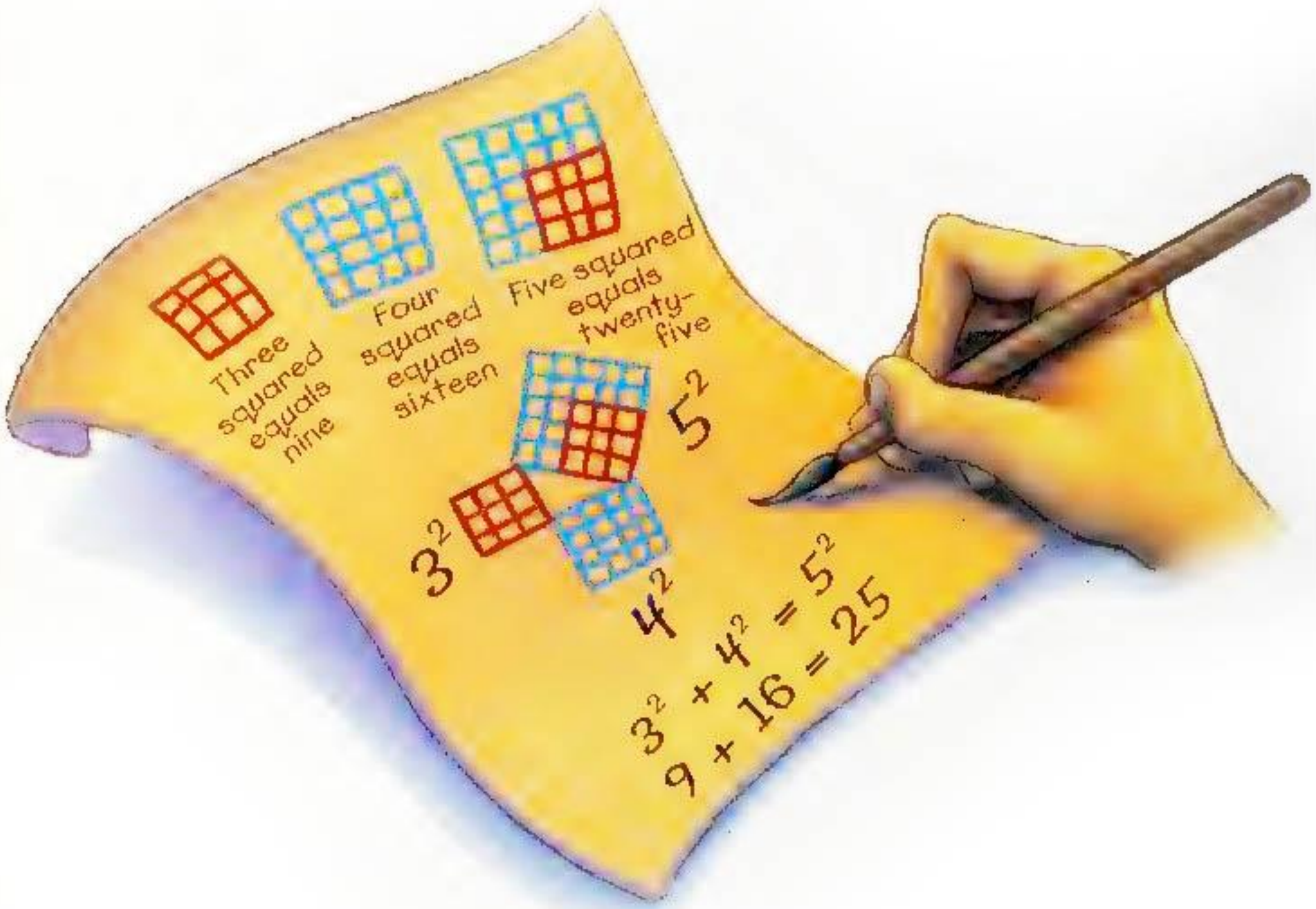
"જે ચોરસ ની પ્રત્યેક બાજુ પર 3 ટાઇલ્સ હતી, એમાં 9 ટાઇલ્સ હતી, જેની પ્રત્યેક બાજુ પર 4 ટાઇલ્સ હતી, એમાં 16 ટાઇલ્સ હતી, અને જેની પ્રત્યેક બાજુ પર 5 ટાઇલ્સ હતી, એમાં 25 ટાઇલ્સ હતી."

"તો એક ચોરસ માં, એક બાજુ ની લંબાઈ, સ્વંય થી ગુણવામાં આવે તો આખા ચોરસ ની ટાઇલ્સ ની સંખ્યા થશે. જયારે કોઈ સંખ્યા ને એનાથી જ ગુણવામાં આવે, તો હું એને 'વર્ગ' કહીશ. ત્રણ ગુણ્યાં ત્રણ, ત્રણ નો વર્ગ બનશે. હું એને 3 x 3 લખીશ."

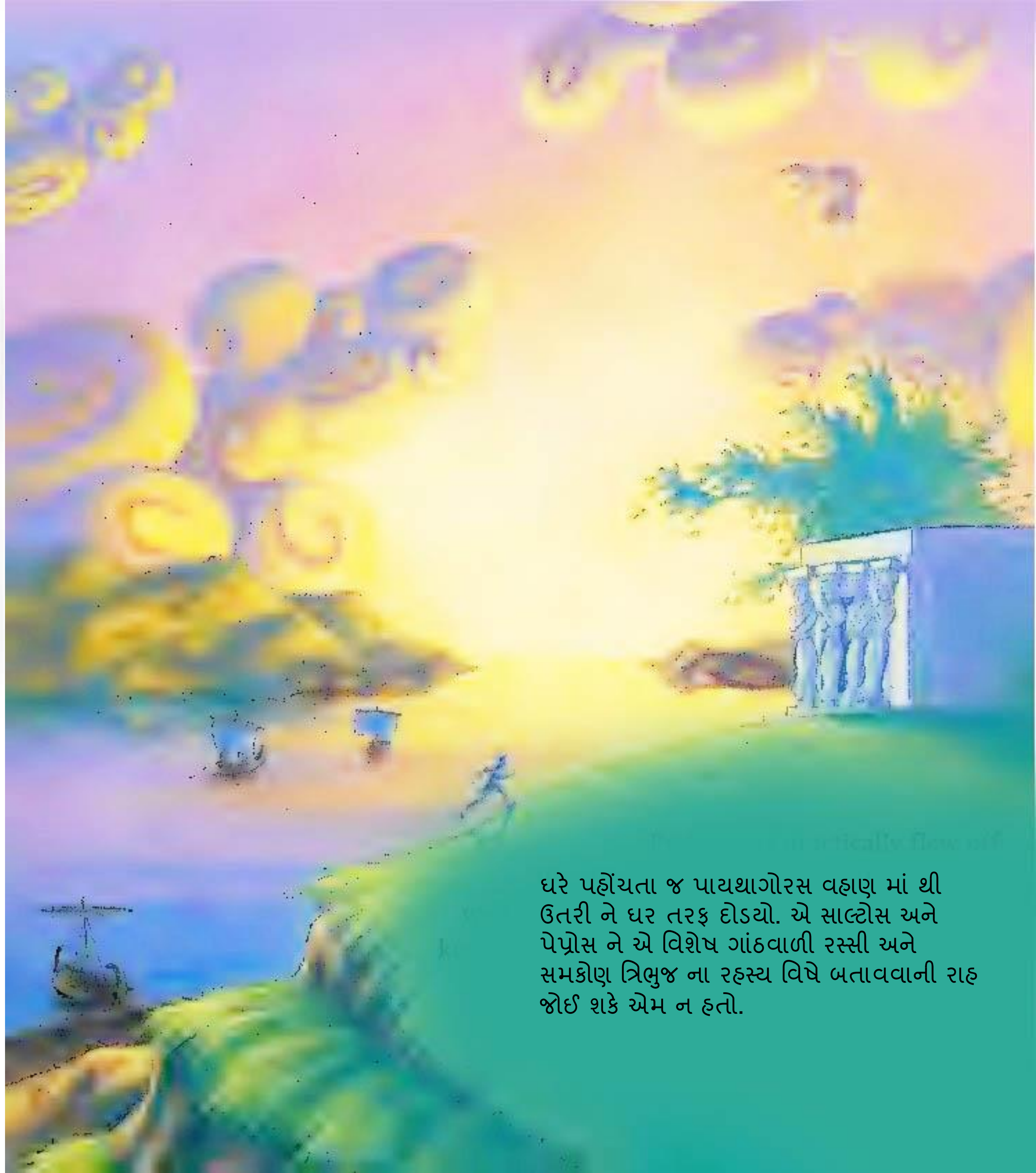


પાયથાગોરસે એક નવું ચિત્ર દોર્યું.

"ત્રણ વર્ગ અને ચાર વર્ગ ને જોડતા પાંચ વર્ગ થાય છે," એ મનમાં બોલ્યો.



"મને જિજ્ઞાસા થાય છે કે શું અન્ય સમકોણ ત્રિભુજ ની બાજુઓ ના વર્ગો નો સરવાળો પણ આવી રીતે હશે?" એણે વિચાર્યું.



ઘરે પહોંચતા જ પાયથાગોરસ વહાણ માં થી ઉતરી ને ઘર તરફ દોડયો. એ સાલ્ટોસ અને પેપ્રોસ ને એ વિશેષ ગાંઠવાળી રસ્સી અને સમકોણ ત્રિભુજ ના રહસ્ય વિષે બતાવવાની રાહ જોઈ શકે એમ ન હતો.

જ્યારે એ અધૂરા મંદિર પાસે પહોંચ્યો, તો સાલ્ટોસ અને પેપ્રોસ ત્યાં ન હતા. નિસરણી જમીન પર પડી હતી જ્યાં પેપ્રોસે એને ફેંકી હતી.

"એ નિસરણી પર ત્યારે ચઢવાનું સહેલું થશે જયારે એનો નીચે નો ભાગ દીવાલ થી લગભગ પાંચ ફીટ દૂર હોય," પાયથાગોરસે વિચાર્યું, "પેપ્રોસે કહ્યું હતું કે દીવાલ બાર ફીટ ઊંચી છે."

એણે માટી માં એક ત્રિકોણ બનાવ્યું અને લખ્યું : $5^2 + 12^2 = ?$

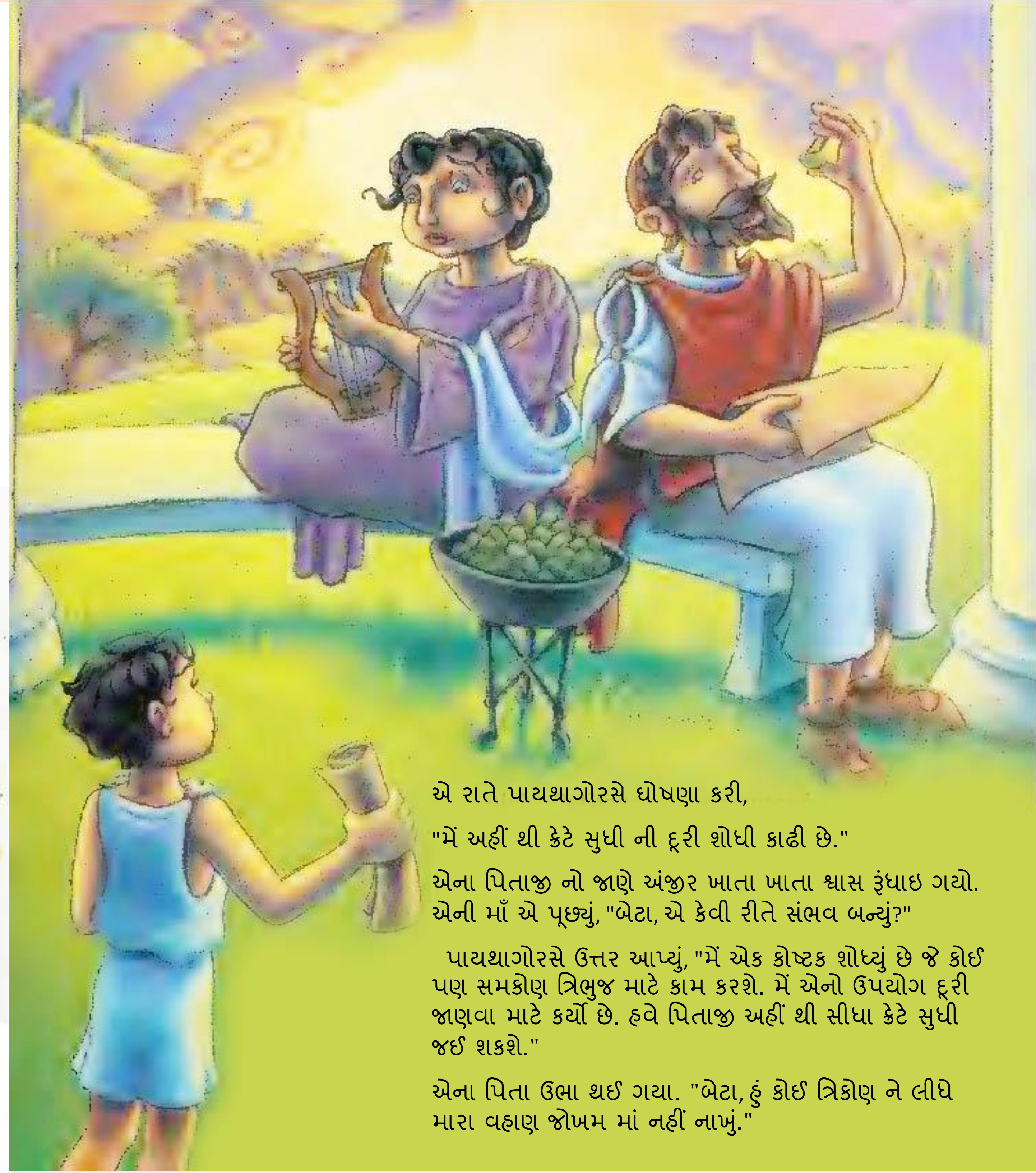
$25 + 144 = 169$

$169 = 13 \times 13$

"બસ! નિસરણી 13 ફીટ લાંબી હોવી જોઈએ." એણે નિસરણી સરખી કરી અને ઘરે ચાલ્યો ગયો.



ઘર પર પાયથાગોરસે એક નકશો કાઢ્યો. એણે એને ધ્યાનથી જોયો. "હું કૌતુહલ કરું છું કે..." એ મનમાં બોલ્યો.



એ રાતે પાયથાગોરસે ઘોષણા કરી,

"મેં અહીં થી ક્રેટે સુધી ની દૂરી શોધી કાઢી છે."

એના પિતાજી નો જાણે અંજીર ખાતા ખાતા શ્વાસ રૂંધાઇ ગયો. એની માઁ એ પૂછ્યું, "બેટા, એ કેવી રીતે સંભવ બન્યું?"

પાયથાગોરસે ઉત્તર આપ્યું, "મેં એક કોષ્ટક શોધ્યું છે જે કોઈ પણ સમકોણ ત્રિભુજ માટે કામ કરશે. મેં એનો ઉપયોગ દૂરી જાણવા માટે કર્યો છે. હવે પિતાજી અહીં થી સીધા ક્રેટે સુધી જઈ શકશે."

એના પિતા ઉભા થઈ ગયા. "બેટા, હું કોઈ ત્રિકોણ ને લીધે મારા વહાણ જોખમ માં નહીં નાખું."



"પિતાજી," પાયથાગોરસે સમજાવવાનું શરુ કર્યું. એ જ સમયે સાલ્ટોસ અને પેપ્રોસ હાંફતા-હાંફતા અંદર આવ્યા, જાણે એ એક પહાડ ચઢી ને આવ્યા હોય.

પેપ્રોસે પાયથાગોરસ ને કહ્યું, "લાગે છે તેં અમારી નિસરણી સાથે કંઈક કર્યું છે!"

"શું પાયથાગોરસ ફરીથી તમને હેરાન કરી રહ્યો છે?" પિતાજી એ ભવા ચઢાવતા પૂછ્યું.

સાલ્ટોસે એનું માથું ધુણાવ્યું, "ના! એણે અમારી નિસરણી બરાબર લંબાઈ ની બનાવી દીધી છે. હવે અમે છત પૂરી કરી શકીશું."

પેપ્રોસે આગળ કહ્યું, "પછી અમારે એટલું જ કરવાનું રહેશે કે સ્તંભ ના વાંકા-ચુકા આધાર ને સરખા કરવા પડશે."

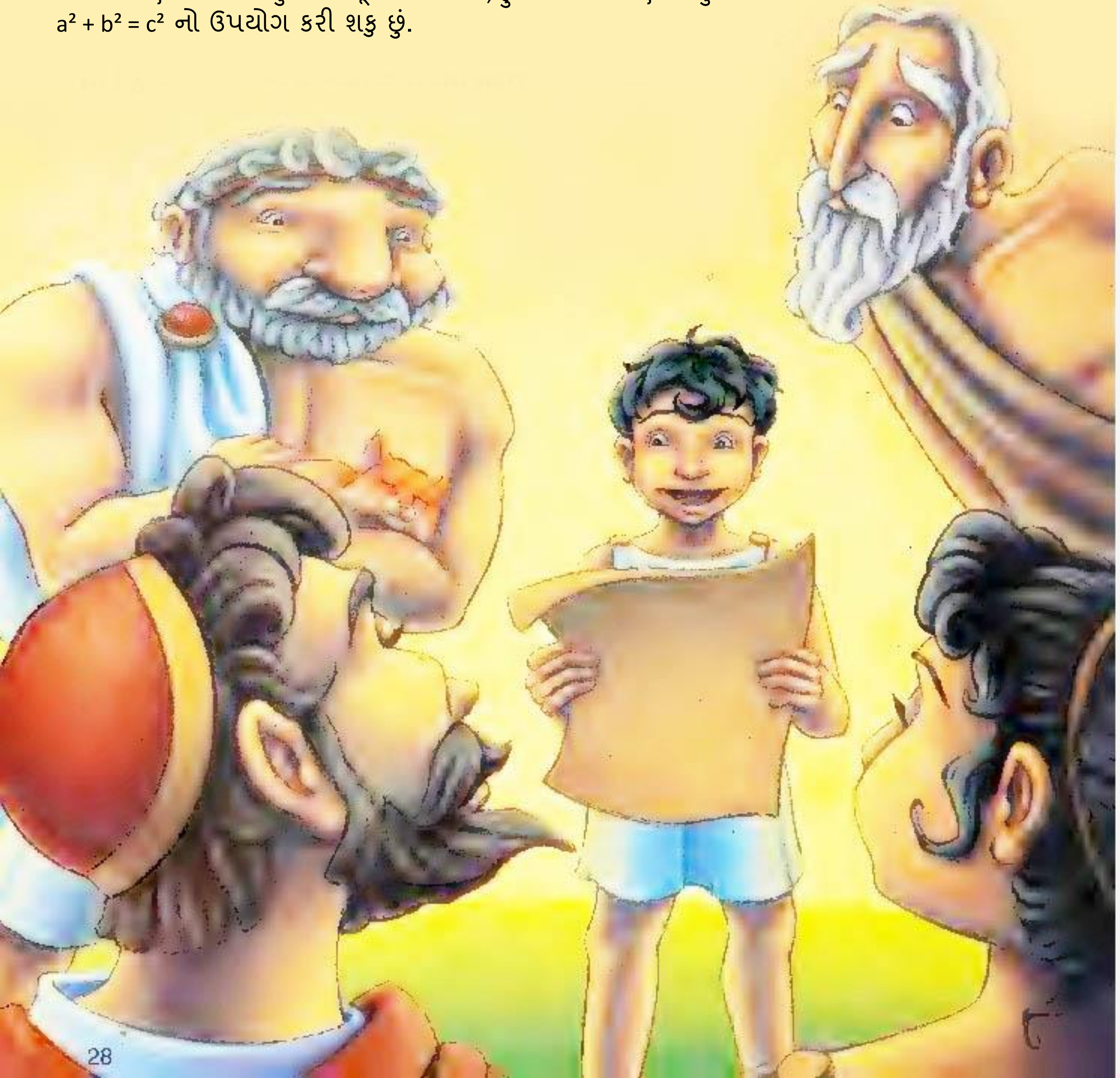


"કદાચ એમાં હું તમારી મદદ કરી શકું છું," પાયથાગોરસે દરખાસ્ત મૂકી. "સમકોણ બનાવવા માટે તમે લોકો મારી રસ્સી નો ઉપયોગ કરો. જો તમે આધારો ને સીધા કરવા માટે સમકોણ નો ઉપયોગ કરશો તો સ્તંભ સીધા ઉભા રહેશે."

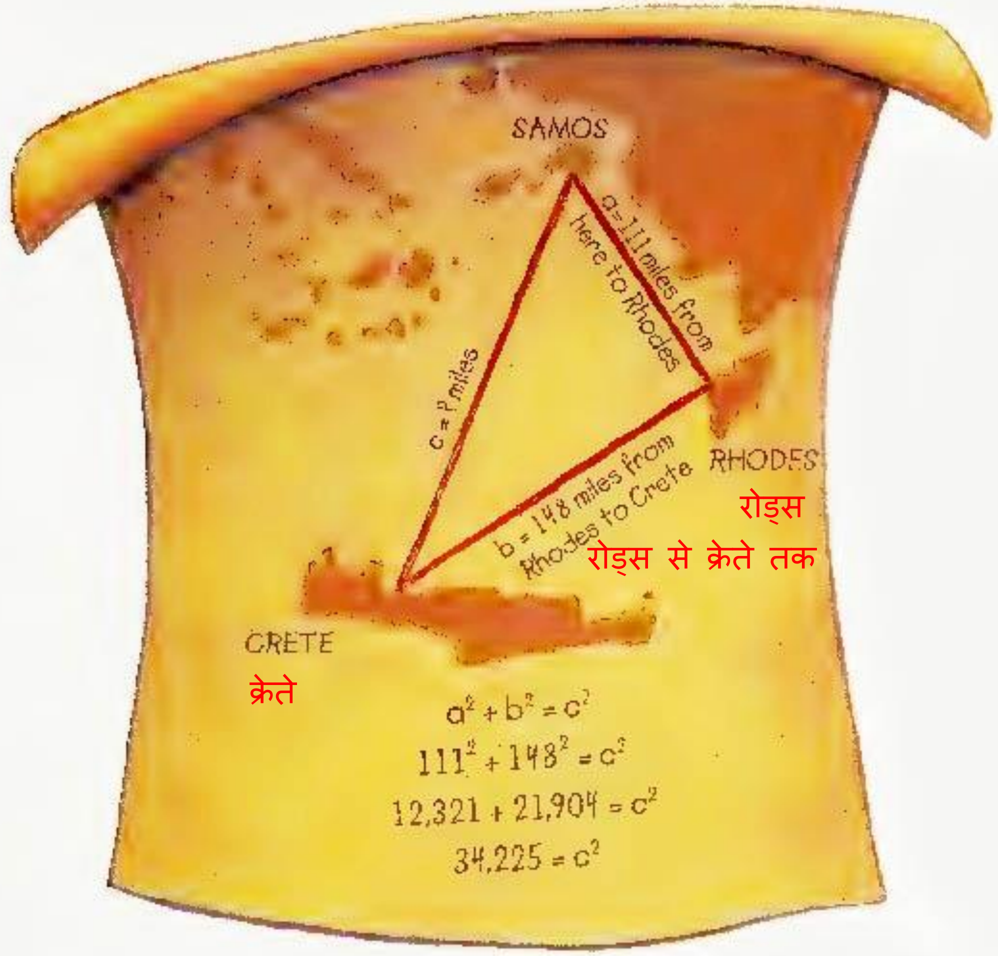
સાલ્ટોસ હસ્યો. "બહુ સરસ! હવે અમે મંદિર નું કામ સમયસર પૂરું કરી શકીશું. તારું હંમેશા સ્વાગત છે કે તને જયારે મરજી થાય ત્યારે આવજે અને અમારી મદદ કરજે."

પાયથાગોરસ ના પિતા એ કહ્યું, "બેટા, પુનર્વિચાર કરતા મને લાગે છે કે તું મને અહીં થી ક્રેટે ની દૂરી જણાવ."

પાયથાગોરસે સમજાવ્યું, "આપણું દ્વીપ, સમોસ, રહોડ્સ અને ક્રેટે સાથે એક સમકોણ ત્રિભુજ બનાવે છે. જો હું ત્રિભુજ ની બાજુઓ ને a, b અને c નામ આપું, તો એ જાણવા કે ક્રેટે સુધી ની દૂરી કેટલી છે, હું મારા સમકોણ ત્રિભુજ નો ઢાંચો $a^2 + b^2 = c^2$ નો ઉપયોગ કરી શકુ છું.



"તમે જોઈ શકો છો કે કેવી રીતે $a^2 + b^2 = 34225$ થાય છે."



"અહીં અને ક્રેટે વચ્ચે ના c ને શોધવા માટે, મારે એ જાણવું હતું કે કઈ સંખ્યા ને પોતાના થી ગુણતા મને 34225 મળે.

હું પહેલે થી જાણતો હતો કે $148^2 = 21904$. પણ એ સંખ્યા બહુ નાની હતી.

મેં 200 ની કોશિશ કરી, પણ $200^2 = 40000$. એ સંખ્યા બહુ મોટી હતી.

મેં 180 ની કોશિશ કરી, અને 180^2 જે 32400 છે, એ વધારે નજીક હતી!

પછી મેં 185 ને 185 થી ગુણ્યાં. એ બરાબર 34225 થયા. તો આપણા દ્વીપ થી ક્રેટે ની દૂરી 185 માઈલ છે."





બધા ચકિત થઈ ગયા. પાયથાગોરસ ના પિતાએ એની પીઠ થાબડી. "સરસ વિચાર્યું, બેટા! તું એક દિવસ એક સારો વેપારી થઈશ."

પાયથાગોરસ ની માઁ એ નરમાશ થી કહ્યું, "કદાચ એ એના બુદ્ધિશાળી મગજ નો ઉપયોગ બીજી વસ્તુઓ માટે પણ કરી શકે."

એના પિતા એ માથું હલાવ્યું. "બેટા, તારી સ્પષ્ટ વિચારશરણી ને લીધે તું એક જનરલ, એક સેનેટર, એક શિક્ષક, જે તું ચાહે એ બની શકે છે. એ તારી મરજી પર નિર્ભર કરે છે."

પાયથાગોરસે સ્મિત કર્યું. એને ભવિષ્ય માં કોઈ મહાન કાર્ય કરવાની આશા હતી.

થોડા દિવસો પછી, પાયથાગોરસે એના પિતા ના વહાણ ને બન્દર માં આવતા જોયું.

એના પિતા એનું સ્વાગત કરવા દોડયા.

"પાયથાગોરસ, તું સાવ સાચો હતો! હું શ્રેષ્ઠ સમય માં ક્રેટે પહુંચી ગયો," પિતા એ એના દીકરા ને આલિંગન આપતા કહ્યું.

પાયથાગોરસે એના પિતા તરફ જોઈ ને કહ્યું, "તમે પણ સાચા હતા. મારે બસ એ શીખવાનું હતું કે વસ્તુઓ ને સાચા કોણ થી કેવી રીતે જોવાય."



ઐતિહાસિક નોંધ

પાયથાગોરસ નો જન્મ 569 ઈ. પૂર્વે ની આસપાસ ગ્રીક દ્વીપ સમોસ પર થયો હતો. એના બાળપણ ની વાસ્તવિક ઘટનાઓ અજ્ઞાત છે. એણે મિસર અને મધ્ય પૂર્વ ની યાત્રા પછી દક્ષિણી ઇટાલી માં એક સ્કૂલ ની સ્થાપના કરી. એ એક દાર્શનિક, સંગીતકાર અને ખગોળશાસ્ત્રી હતા, પણ એને એક ગણિતજ્ઞ તરીકે સૌથી વધારે યાદ કરવામાં આવે છે. એની સૌથી પ્રસિદ્ધ શોધ એ છે જેને હવે આપણે પાયથાગોરસ પ્રમેય કહીયે છીએ :

$a^2 + b^2 = c^2$

જયારે a અને b એક સમકોણ ત્રિભુજ ના બે પાયા છે, અને c સમકોણ ની વિપરીત બાજુ છે.

